

Bewertete Körper

Blatt 5

Abgabe: 30.11.2021

Aufgabe 1 (3 Punkte).

Sei $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeige, dass jede $(p - 1)$ -te Einheitswurzel in \mathbb{Z}_p liegt.

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Sei R , bzw. S , ein Bewertungsring vom Körper K , bzw. L . Wenn L eine Körpererweiterung von K ist, ist die Ringerweiterung $R \subset S$ eine *Bewertungsringweiterung*, falls $S \cap K = R$.

- (a) Zeige, dass $\mathfrak{M}_S \cap R = \mathfrak{M}_R$.
- (b) Schließe daraus, dass es eine Einbettung von $K^*/U(R)$ in $L^*/U(S)$ als angeordnete Gruppen gibt.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

- (a) Seien Γ_1 und Γ_2 zwei abelsche angeordnete Gruppen vom Rang n , beziehungsweise m . Bestimme den Rang der Gruppe $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ mit der lexikographischen Ordnung.
- (b) Was ist der Rang von $(\underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n, +)$ mit der lexikographischen Ordnung ?

Aufgabe 4 (10 Punkte).

Sei $p \neq 2$ eine Primzahl.

- (a) Zeige mit Hilfe des henselschen Lemmas, dass die Menge

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)^2 = \{x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_p) \mid x = y^2 \text{ für ein } y \text{ aus } \mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)\}$$

offen in \mathbb{Z}_p ist.

- (b) Schließe daraus, dass der Index der Untergruppe $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)^2$ in $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)$ endlich ist.
HINWEIS: Die Menge $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)$ ist abgeschlossen in der kompakten Bewertungsring \mathbb{Z}_p . Formuliere Kompaktheit bezüglich offener Überdeckungen.
- (c) Schließe daraus, dass der Index der Untergruppe $(\mathbb{Q}_p^*)^2$ in \mathbb{Q}_p^* endlich ist.
HINWEIS: Jedes Element aus \mathbb{Q}_p^* lässt sich schreiben als $p^n u$ für ein n aus \mathbb{Z} und u aus $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)$.
- (d) Zeige, dass jede quadratische Erweiterung eines Körpers der Charakteristik ungleich 2 isomorph zum Zerfällungskörper eines Polynomes der Form $x^2 - a$ ist.
- (e) Schließe daraus, dass \mathbb{Q}_p nur endlich viele (bis auf Isomorphie) quadratischen Erweiterungen besitzt.

ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IN DEN BRIEFKASTEN 3.30 IM UG DER ERNST-ZERMELO-STRASSE 1. DIE ÜBUNGSBLÄTTER MÜSSEN BIS 15 UHR AM JEWEILS ANGEGEBENEN ABGABEDATUM EWINGEWORFEN WERDEN. DAS BLATT KANN ZU ZWEIT EWINGEREICHT WERDEN.